Центральний науково-дослідний інститут
Збройних Сил України
Military Science. Vol. 1 No. 1. 2023

Математична модель аналітичного розв'язання нелінійної системи диференціальних рівнянь для розрахунку приросту показників ефективності під час нарощування зусиль військ

Олександр Кузнєцов
кандидат військових наук
старший науковий співробітник
Центральний науково-дослідний інститут Збройних Сил України
03049, Повітрофлотський проспект, 28 Б, Київ, Україна
e-mail: alexkuznes1966@gmail.com
ORCID: 0000-0002-8764-6941

Сергій Баранов
Начальник Головного управління ракетних війські артилерії та безпілотних систем
Генеральний штаб Збройних Сил України
03168, Повітрофлотський проспект, 6, Київ, Україна
e-mail: sharada3699@gmail.com
ORCID: 0000-0002-3306-943X

Анотація. Для оцінювання ступеня виконання військами (силами) визначених завдань використовують певні числові характеристики – показники ефективності. Саме вони виступають кількісною мірою виконання бойових завдань і отримуються в результаті використання різних методів дослідження операції. Одним з показників є показники приросту під час нарощування зусиль. Порядок розрахунку приросту показників ефективності з урахуванням нелінійного характеру процесу однозначно невизначено. Для лінійного класу систем задача аналітичного розв'язання вирішується повністю, що дозволяє розрахувати показники ефективності з подальшим визначенням оціночних значень їх позитивного приросту. Для нелінійних систем немає такої завершеності результатів, але для певного їх класу вдається знайти аналітичне розв'язання. Завдання дослідження сформульовано наступним чином. Необхідно знайти таку залежність, яка б пов'язувала чисельності сторін в одному аналітичному виразі з урахуванням нелінійного характеру процесу.

Методичний підхід ґрунтується на виведенні аналітичного співвідношення, яке є загальним інтегралом нелінійних систем диференціальних рівнянь середніх. За допомогою цього співвідношення (де встановлюється функціональний взаємозв'язок між показниками чисельності протиборчих сторін), вихідна система зводиться до одного нелінійного диференціального рівняння першого порядку (для показника часу), яке має аналітичний розв'язок за допомогою табличних інтегралів. Отримання двох алгебраїчних рівнянь є ключовим для визначення приросту показників ефективності дій, що значно підвищує оперативність розрахунків порівняно з чисельними методами.

Ключові слова: нелінійні системи, динаміка середніх, аналітичне співвідношення, алгебраїчні рівняння, показники ефективності.

Вступ (Introduction)

Для оцінювання ступеня виконання військами бойових завдань використовують певні числові характеристики-показники ефективності. Саме вони виступають кількісною мірою

виконання бойових завдань і отримуються в результаті застосування різних методів дослідження операції під час аналізу складних систем (військових формувань) або процесів. Досліджувана операція (бойові дії) може бути кількісно охарактеризована певною множиною показників ефективності, кожний з яких відтворює її певну ознаку. Серед цих показників одним із важливих є показник втрат чисельності угруповання, який не повинен перевищувати задане значення залежно від характеру бойових дій (операції). Тут з позиції оцінювання найбільший інтерес представляє випадок, коли необхідно додатково розрахувати зміну цього показника в плані зменшення втрат за визначений час.

За таких умов доцільно використовувати метод динаміки середніх у нелінійній постановці, який встановлює аналітичний зв'язок між наведеними параметрами. Позитивний ефект (зменшення показника втрат та часу виконання завдання) досягається за рахунок нарощування зусиль (одне завдання виконується більш ніж одним підрозділом) за незмінності інших умов.

Слід зазначити, що аналітичне розв'язання цього завдання досить актуальне у прикладній області досліджень нелінійних систем диференціальних рівнянь, особливо у випадку їх нелінійності.

Методологічна основа (Methodological Framework)

Серед великого арсеналу математичних моделей у прикладній області протиборства сторін особливе місце посідають аналітичні моделі Ланчестера.

Дослідження таких моделей, що було розпочате в роботах їх автора, знайшло подальший розвиток у вигляді узагальненої моделі Ланчестера:

$$\frac{dA(t)}{dt} = P - aB(t) - cA(t) - kA(t)B(t);$$

$$\frac{dB(t)}{dt} = Q - bA(t) - gB(t) - lB(t)A(t),$$

де $A(t),\ B(t)$ – кількість одиниць угруповань сторін (або їх чисельність);

$\frac{dA(t)}{dt}, \frac{dB(t)}{dt}$ – динаміка зміни кількості одиниць сторін у часі;

a, b – інтенсивності ефективного уражаючого впливу кожної одиниці сторін відповідно (у загальному випадку функції величин $A(t),\ B(t)$);

$P,\ Q$ – швидкості відновлення втрат за рахунок введення резервів;

c, g, k, l – невід'ємні параметри.

Аналіз узагальненої моделі Ланчестера при $k=l=0$ було проведено у (Морз, Кимбелл, 1956). Для $k\neq0,\ l\neq0$, але при $c=g=0$ його було продовжено у монографії (Вентцель), а також у низці інших робіт.

Наступним етапом розвитку методу динаміки середніх у формі рівнянь Ланчестера стала подальша деталізація процесу протидії для різнотипних засобів зі збільшенням (за кількістю цих засобів) порядку системи диференціальних рівнянь, що значно ускладнювало її дослідження. Для пониження розмірності задачі у (Брезгин, Буравлев, 2011) та у низці інших робіт було запропоновано підхід із використанням коефіцієнтів співрозмірності різнотипних засобів. У результаті початкова багатомірна система перетворювалась до системи диференціальних рівнянь. Отже, дослідження системи диференціальних рівнянь і досі не втратило своєї значущості.

Результати і обговорення (Results and Discussions)

Викладення суті методичного підходу щодо визначення аналітичного розв'язання нелінійної системи диференціальних рівнянь методу динаміки середніх з подальшим розрахунком приросту показників ефективності.

У загальному вигляді вихідну нелінійну систему методу динаміки середніх представимо у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{dm_A}{dt} &= -f_B(\lambda_B)\cdot m_B; \\ \frac{dm_B}{dt} &= -f_A(\lambda_A)\cdot m_A, \end{aligned} \tag{1}$$

де функції $f_A(\lambda_A), f_B(\lambda_B)$ апроксимуються залежностями виду:

$$\begin{aligned} f_A(\lambda_A) &= \lambda_A(\frac{m_B}{N_B})^q; \\ f_B(\lambda_B) &= \lambda_B(\frac{m_A}{N_A})^q. \end{aligned} \tag{2}$$

Завдання дослідження сформулюємо наступним чином. Необхідно знайти таку залежність, яка б пов'язувала чисельності сторін в одному аналітичному виразі з урахуванням нелінійного вигляду системи (1). Для цього, як і у попередньому випадку, скористаємося способами знаходження загальних інтегралів системи диференціальних рівнянь. Тоді запис рівнянь у вигляді (1), де $q=1$ дозволяє знайти один із таких інтегралів. Дійсно, виконуючи необхідні математичні викладки, отримаємо:

$$m_A = \frac{\lambda_B N_B}{\lambda_A N_A} m_B + C, \tag{3}$$

де постійна інтегрування C визначається виразом:

$$C = \frac{N_A^2\lambda_A - N_B^2\lambda_B}{\lambda_A N_A}. \tag{4}$$

Підставимо (3) з урахуванням (4) у вихідне рівняння (1) і отримаємо:

$$\frac{dm_B}{dt} = -\frac{\lambda_B}{N_A} m_B^2 - (\frac{\lambda_A N_A}{N_B} - \frac{\lambda_B N_B}{N_A}) m_B. \tag{5}$$

Перепишемо (5) у вигляді:

$$dt = \frac{dm}{-\frac{\lambda_B}{N_A} m_B^2 - (\frac{\lambda_A N_A}{N_B} - \frac{\lambda_B N_B}{N_A}) m_B}, \tag{6}$$

де права частина представлена формою табличного інтеграла (Бронштейн, Семендяев, 1986).

Тоді, інтегруючи вираз (6), отримаємо залежність:

$$t = \frac{1}{-\frac{\lambda_A N_A}{N_B} + \frac{\lambda_B N_B}{N_A}} \ln \frac{m_B}{-\frac{\lambda_B}{N_A} m_B - (\frac{\lambda_A N_A}{N_B} - \frac{\lambda_B N_B}{N_A})} + C_1. \tag{7}$$

В залежності (7) постійна інтегрування C_1 визначається з початкових умов. Остаточно для t вираз (7) запишеться у вигляді:

$$t = \frac{N_A N_B}{\lambda_B N_B^2 - \lambda_A N_A^2} \ln \frac{m_B(-\frac{\lambda_B}{N_A} N_B - \frac{\lambda_A N_A^2 - \lambda_B N_B^2}{N_A N_B})}{N_B(-\frac{\lambda_B}{N_A} m_B - \frac{\lambda_A N_A^2 - \lambda_B N_B^2}{N_A N_B})}. \tag{8}$$

Об’єднаємо (3) та (4) і запишемо:

$$m_A = \frac{\lambda_B N_B}{\lambda_A N_A} m_B + \frac{N_A^2 \lambda_A - N_B^2 \lambda_B}{\lambda_A N_A}. \tag{9}$$

Рівняння (8) та (9) є розв’язанням нелінійної системи (1) і у подальшому використовуються для визначення приросту показників ефективності дій під час нарощування зусиль.

Покажем і інший спосіб розв’язання системи (6), за $q=1$. Тоді рівняння (5) перепишемо у вигляді:

$$\dot{m}_B + (\frac{\lambda_A N_A}{N_B} - \frac{\lambda_B N_B}{N_A}) m_B = \frac{-\lambda_B}{N_A} m_B^2. \tag{10}$$

Форма запису (10) відповідає рівнянню Бернуллі (Бронштейн, Семендяев, 1986) (Двайт, 1977), яке має свій алгоритм розв’язання. Тут, шляхом спеціальної заміни перемінних рівняння (10) зводиться до лінійного диференціального рівняння:

$$\dot{z} + az = b, \tag{11}$$

яке легко проінтегрувати.

У подальшому, шляхом зворотної заміни перемінних, знаходиться розв’язання вихідної системи (10):

$$m_B = \frac{N_B\left(\frac{\lambda_A N_A}{N_B} - \frac{\lambda_B N_B}{N_A}\right)}{\frac{\lambda_A N_A}{N_B} e^{\left(\frac{\lambda_A N_A}{N_B} - \frac{\lambda_B N_B}{N_A}\right)t} - \frac{\lambda_B N_B}{N_A}}, \quad (12)$$

з якого визначається час t. Отриманий вираз збігається з (8) з урахуванням аналітичного перетворення цього виразу. За аналогічного підходу розраховується і величина m_A.

Знайдемо тепер приріст показників ефективності. Припустимо, що на завершальному етапі бойових дій (t_1) величина m_B досягла значення $m_B(t_1)$ (параметр, за якого сторона B відмовляється від ведення подальших бойових дій). Тоді значення $m_A(t_1)$ однозначно знайдеться із виразу (9).

Припустимо, що сторона A збільшила кількість своїх підрозділів у n разів, а параметри сторони B залишилися без змін. З урахуванням цього поставимо собі за мету визначення скороченого часу бойових дій (t_2), а також зменшення величини відносних втрат сторони A на момент часу t_2, вважаючи, що $m_B(t_1) = m_B(t_2)$.

При цьому вирази (13) та (14) запишуться у вигляді:

$$m_A(t_2) = \frac{\lambda_B N_B}{\lambda_A n N_A} m_B(t_1(t_2)) + \frac{(nN_A)^2 - N_B\lambda_B}{\lambda_A n N_A}; \quad (13)$$

$$t_2 = \frac{nN_A N_B}{\lambda_B N_B^2 - \lambda_A n^2 N_A^2} \ln \frac{m_B(t_1(t_2))\left(-\frac{\lambda_B}{N_A} N_B - \frac{\lambda_A n^2 N_A^2 - \lambda_B N_B^2}{nN_A N_B}\right)}{N_B\left(-\frac{\lambda_B}{nN_A} m_B(t_1(t_2)) - \frac{\lambda_A n^2 N_A^2 - \lambda_B N_B^2}{nN_A N_B}\right)}. \quad (14)$$

Тоді час бойових дій зменшиться на величину:

$$\Delta t = t_1 - t_2,$$

а показник відносних втрат сторони A зменшується на величину:

$$\Delta B_A = \frac{N_A - m_A(t_1)}{N_A} - \frac{nN_A - m_A(t_2)}{nN_A}.$$

Таким чином, потрібний ефект буде досягнутий за менший проміжок часу і з меншими втратами.

Дещо складніше виглядає розв'язання системи (1) за $q=2$. Тут доцільно застосовувати метод Бернуллі. Тоді рівняння для m_B запишеться у вигляді:

$$m_B = -\frac{\lambda_A N_A}{N_B^{2+R}} m_B^{2+R}, (R = \frac{\lambda_B N_B^2}{\lambda_A N_A^2}),$$

а його розв'язок буде визначатися виразом:

$$m_B = \sqrt[-1-R]{(-1-R)(-\frac{\lambda_A N_A}{N_B^{2+R}})t + N_B^{-1-R}}.$$

Тут розрахунок приросту показників ефективності аналогічний випадку, де *q=1.*

Підставою для вибору моделі у вигляді (1) був розрахунок її параметрів за наступним алгоритмом. Спочатку системі (1) ставився у відповідність перехідний процес, який зображено на рис.1.

На рис. 1 крапками позначені величини, які були отримані за різними варіантами імітаційного моделювання. У подальшому для кожної залежності складався регресійний поліном у вигляді залежності:

$$m_{A(B)} = a_0^{A(B)} + a_1^{A(B)} t + a_2^{A(B)} t^2 + a_3^{A(B)} t^3 + \dots . \quad (15)$$

Для визначення параметрів цього полінома застосовувався метод найменших квадратів. Потім, шляхом диференціювання залежності (12), визначалися ліві частини рівнянь (1). На завершення всього процесу методом підбору з отриманих алгебраїчних рівнянь ідентифікувалися коефіцієнти λ_A і λ_B. За критерій істини приймались ті значення незалежних змінних, за яких на всьому часовому проміжку ідентифікації відхилення розрахункових (під час диференціювання рівнянь (1)) величин $m_{A(B)\,розр}$ від відповідних значень $m_{A(B)}$ (знайдених за поліноміальною залежністю) не перевищували інтегральну похибку $\Delta_{A,B\,зад}$.

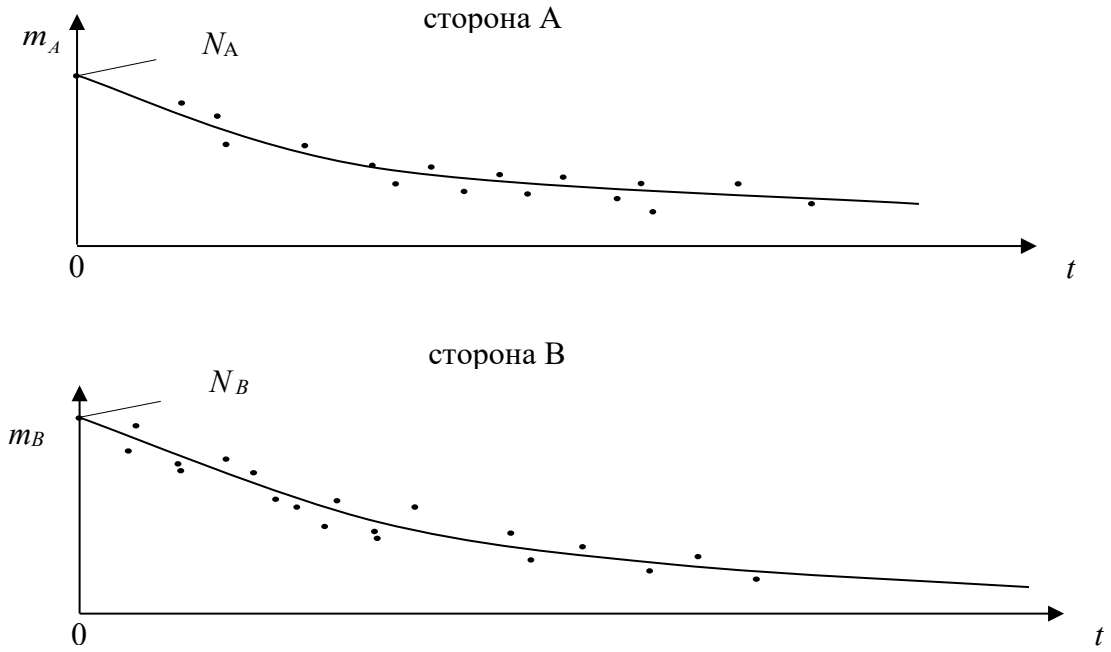


Рисунок 1. Розрахунок параметрів моделі

Питанням визначення аналітичних залежностей для показників ефективності на основі методу динаміки середніх у лінійній постановці присвячена низка праць, (Романченко, Котляров), де розв'язок рівнянь здійснюється на основі загальних аналітичних підходів до дослідження системи диференціальних рівнянь (Бронштейн, 1986, Вентцель, 1972, Двайт, 1977).

Так, наприклад, у роботі (Романченко, Котляров, Павлюк, 2018) центральне місце займає модель ведення двосторонніх бойових дій угруповань у протиборстві сторін на основі лінійних диференціальних рівнянь динаміки середніх. У загальному вигляді вони записуються у формі:

$$\begin{aligned} \frac{dm_A}{dt} &= -m_B\lambda_B; \\ \frac{dm_B}{dt} &= -m_A\lambda_A, \end{aligned} \tag{16}$$

де m_A, m_B – кількість боєготових одиниць угруповань сторін;

$\lambda_A = const, \lambda_B = const$ – вогневі продуктивності сторін;

$\frac{dm_A}{dt}, \frac{dm_B}{dt}$ – динаміка змінення кількості боєготових одиниць сторін у часі.

Розв'язання системи (16) дозволяє встановлювати аналітичні залежності. Для цього використовуються способи знаходження загальних інтегралів системи диференціальних рівнянь. У цьому випадку запис рівнянь у вигляді (16) дозволяє знайти один із таких інтегралів. Дійсно, виконуючи необхідні математичні викладки, отримаємо:

$$m_A^2 = \frac{\lambda_B}{\lambda_A} m_B^2 + C, \tag{17}$$

де C – довільна постійна інтегрування.

Вираз (17) справедливий для будь-якого моменту часу і, таким чином, у загальному вигляді встановлює аналітичний зв'язок між чисельностями угруповань, що особливо важливо під час розрахунку такого показника ефективності, як співвідношення сил сторін.

Що стосується постійної інтегрування C, то вона незмінна як для початкового співвідношення сил сторін, так і для чисельностей сторін на кінець операції. Це і використовується у подальшому. Виходячи із вимог нормативних документів, через величини m_A^k і m_B^k за відомих λ_A і λ_B задається таке співвідношення сил сторін на кінець операції, яке нас задовольняє. Тоді з рівняння (17) легко знаходиться значення C.

Тепер занотуємо це рівняння для початкових значень чисельності сторін $m_A^н$ і $m_B^н$ у вигляді:

$$m_A^н = \sqrt{\frac{\lambda_B}{\lambda_A}(m_B^н)^2 + C}. \tag{18}$$

Таким чином, ураховуючи раніше знайдене значення *C*, за відомого початкового складу угруповання однієї зі сторін (наприклад, $m_B^н$) можна знайти, відповідно до виразу (18), і початкову чисельність другої сторони ($m_A^н$). Необхідно підкреслити, що у цьому випадку вихідне співвідношення сил $\frac{m_A^н}{m_B^н}$ ($m_B^н$ – задається, $m_A^н$ – визначається) забезпечить досягнення цілі операції за раніше заданим критерієм співвідношення сил $\frac{m_A^к}{m_B^к}$ на момент її завершення.

У розглянутому методичному підході невирішеним залишається тільки питання визначення необхідного часу t на проведення операції (бойових дій) за обраним критерієм.

У роботі (Романченко, Котляров, Шаповал, 2008) пропонується такий алгоритм розв'язання цієї задачі. Спочатку розв'язується система (16) за заданого значення m_B^H і знайденої величини m_A^H. Тоді отримуються такі часові залежності:

$$2\sqrt{\lambda_A}m_A = (f_A(\lambda_A, m_A^H) - f_B(\lambda_B, m_B^H)) \cdot e^{\sqrt{\lambda_A\lambda_B}t} + (f_A(\lambda_A, m_A^H) + f_B(\lambda_B, m_B^H)) \cdot e^{-\sqrt{\lambda_A\lambda_B}t};$$

$$2\sqrt{\lambda_B}m_B = -(f_A(\lambda_A^{/}, m_A^H) - f_B(\lambda_B, m_B^H)) \cdot e^{\sqrt{\lambda_A\lambda_B}t} + (f_A(\lambda_A, m_A^H) + f_B(\lambda_B, m_B^H)) \cdot e^{-\sqrt{\lambda_A\lambda_B}t}. \quad (19)$$

Далі у виразі (19) підсумовуються праві та ліві частини рівнянь, після чого з отриманої залежності визначається значення часового параметра *t* у вигляді:

$$t = \frac{1}{\sqrt{\lambda_A\lambda_B}} \ln \frac{f_A(\lambda_A, m_A^H) + f_B(\lambda_B, m_B^H)}{m_A\sqrt{\lambda_A} + m_B\sqrt{\lambda_B}}. \quad (20)$$

За відомих $m_{A,B}^H, \lambda_{A,B}$, підставляючи тепер у (20) замість величин m_A *і* m_B їх значення $m_{A,B}^K$, які задовольняють цілі досягнення операції, визначається й тривалість ведення бойових дій *t*.

Відмітимо, що для лінійних систем задача аналітичного розв'язання вирішується повністю. Це дозволяє розрахувати й інші показники ефективності з подальшим визначенням оцінних значень їх позитивного приросту.

Що стосується нелінійних систем, то у цій області досліджень немає такої завершеності результатів, але для певного їх класу вдається отримати аналітичне розв'язання.

Висновки (Conclusion)

Запропонований методичний підхід ґрунтується на виведенні аналітичного співвідношення, яке є загальним інтегралом нелінійних систем диференціальних рівнянь динаміки середніх. За допомогою цього аналітичного виразу (де встановлюється функціональний взаємозв'язок між показниками чисельності протиборчих сторін) вихідна система зводиться до одного нелінійного диференціального рівняння першого порядку (для показника часу), яке має аналітичний розв'язок за допомогою табличного інтегрування або шляхом розв'язання рівняння Бернуллі. Отримання двох алгебраїчних рівнянь є ключовим для визначення приросту показників ефективності дій.

Подальшим напрямом досліджень можна вважати чисельну інтерпретацію застосування цього підходу для визначення приросту показників ефективності у конкретних операціях (бойових діях).

Використані джерела

1. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Москва: Наука, 1986. 544 с.
2. Брезгин В. С., Буравлев А. И. Уравнение динамики боевых потенциалов противоборствующих группировок. Электронный научный журнал “Вооружение и экономика”. № 1(13)/2011. http://www.mil.ru/info/1070/51205/index.shtml. С.59–65.
3. Вентцель Е. С. Исследование операций. Москва: Сов. радио, 1972. 552 с.
4. Горевич Б. Выработка способа противовоздушной обороны объекта на основе комплексного использования разнотипных математических моделей боевых действий. Военная мысль. № 9. Москва. 2008. С. 60–66.
5. Двайт Г. Таблицы интегралов и другие математические формулы. Москва. Наука. 1977.
6. Морз Ф. М., Кимбелл Д. К. Методы исследования операций. Москва. Советское радио, 1956.
7. Романченко І., Котляров В., Павлюк О. Визначення аналітичної залежності для початкового співвідношення сил сторін з урахуванням критеріальних обмежень. Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони. 2018. № 3(33). С. 139–142
8. Романченко І. С. Методика визначення вихідного співвідношення сил сторін з врахуванням вимог до операції / І. С. Романченко, В. П. Котляров, Ю. Е. Шаповал, О. О. Смірнов // Зб. наук. пр. ЦНДІ ЗС України. 2008. № 3 (45). С. 34–38.
9. Романченко І. С. Чисельна інтерпретація динаміки змінення співвідношення сил сторін під час ведення ними бойових дій / І. С. Романченко, В. П. Котляров, Ю. Е. Шаповал // Зб. наук. пр. ЦНДІ ЗС України. 2008. № 4 (46). С. 11–15.

References

1. Bronshtein I. N., Semendyaev K. A. Spravochnik po matematice dlya inzhenerov i uchashchikh vtuzov [Handbook of Mathematics for Engineers and Higher Education Students]. Moscow: Nauka, 1986. 544 p. (in Russian).
2. Brezgin V. S., Buravlev A. I. Equation of Dynamics of Combat Potentials of Opposing Groups. Electronic scientific journal "Armament and Economy". No 1(13)/2011. http://www.mil.ru/info/1070/51205/index.shtml. S.59–65.
3. Ventsel' E. S. Issledovanie operatsiy [Research of operations]. Moscow: Sov. Radio, 1972. 552 p. (in Russian).
4. Gorevich B. Vyrabotka sposoba provozvozdushnoy ob'ekty na osnove kompleksnogo ispol'zovaniya raznotipnykh matematicheskikh modeli boevykh deystviy [Development of a method of anti-air defense of an object based on the complex use of different types of mathematical models of combat actions]. Military thought. No. 9. Moscow. 2008. pp. 60–66.
5. Dvait G. Tables of Integrals and Other Mathematical Formulas. Moscow. Science. 1977.
6. Morse F. M., Kimbell D. K. Methods of operations research. Moscow. Soviet Radio, 1956.
7. Romanchenko, I., Kotlyarov, V., and Pavliuk, O. "Definition of analytic dependence for the initial balance of forces of the parties taking into account the criterion limitations." Modern information technologies in the field of security and defense. 2018. № 3(33). pp. 139–142
8. Romanchenko I. S., Kotlyarov V. P., Shapoval Yu. Sci. pr. Central Research Institute of the Armed Forces of Ukraine. 2008. № 3 (45). Pp. 34–38.
9. Romanchenko, I. S., Kotlyarov, Yu. pr.: Central Research Institute of the Armed Forces of Ukraine. 2008. № 4 (46). Pp. 11–15.

Центральний науково-дослідний інститут
Збройних Сил України
Military Science. Vol. 1 No. 1. 2023

Mathematical model of the analytical solution of a nonlinear system of differential equations for calculating the increase in efficiency indicators during the build-up of military efforts

Oleksandr Kuznietsov
PhD in Military Sciences
Senior Researcher
Central Research Institute of the Armed Forces of Ukraine
03049, Povitroflotskyi Ave., 28 B, Kyiv, Ukraine
e-mail: alexkuznes1966@gmail.com
ORCID: 0000-0002-8764-6941

Serhii Baranov
Head of the Main Directorate of Missile Forces, Artillery and Unmanned Systems,
General Staff of the Armed Forces of Ukraine,
03168, Povitroflotskyi prospect, 6, Kyiv, Ukraine
e-mail: sharada3699@gmail.com,
ORCID: 0000-0002-3306-943X

Abstract. To assess the degree of fulfillment of certain tasks by troops (forces), certain numerical characteristics are used – performance indicators. They are a quantitative measure of the performance of combat missions and are obtained as a result of the use of various methods of operation research. One of the indicators is the growth rates during the build-up of efforts. The procedure for calculating the increment of performance indicators, taking into account the non-linear nature of the process, is unambiguously uncertain. For a linear class of systems, the problem of analytical solution is solved completely, which makes it possible to calculate performance indicators with the subsequent determination of estimated values of their positive growth. For nonlinear systems there is no such completeness of the results, but for a certain class of them it is possible to find an analytical solution. The objectives of the study are formulated as follows. It is necessary to find such a dependence that would relate the number of parties in one analytical expression, taking into account non-linear nature of the process.

The methodical approach is based on the derivation of the analytic relation, which is the general integral of nonlinear systems of differential equations of means. With the help of this relation (where the functional relationship between the indicators of the number of opposing sides is established), the original system is reduced to one nonlinear differential equation of the first order (for the time indicator), which has an analytical solution by means of table integrals. Obtaining two algebraic equations is key to determining the increase in performance indicators, which significantly increases the efficiency of calculations compared to numerical methods.

Keywords: nonlinear and systems, dynamics of averages, analytical relations, algebraic and equation, performance indicators.