The Central Research institute
of the Armed Forces of Ukraine

ISSN (print): 2786-9318
ISSN (online): 2786-9326
Military Science. Vol. 4 No. 2 (2026)

**Received:** *April 3, 2026* | **Revisions Requested:** - | **Revision Received:** -
**Accepted:** *May 18, 2026* | **Published Online:** *August 5, 2026*

Licensed (C) by Creative Commons Attribution International License 4.0 (CC BY-NC-SA)

DOI: 10.62524/msj.2026.4.2.11

# Ентропійна динаміка похибок округлення в арифметиці чисел з плаваючою точкою: теорія, моделі та алгоритмічні наслідки

**Тарас Старушенко**
аспірант
кафедра інформаційної безпеки
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
03056, проспект Перемоги, 37, Київ, Україна
e-mail: martinstartaras@gmail.com
ORCID: 0009-0008-9226-4666

**Анотація.** Похибки округлення в арифметиці чисел з плаваючою точкою є одним із найбільш прихованих і водночас найнебезпечніших джерел відмов обчислювальних систем. Попри десятиліття досліджень у чисельному аналізі, відсутній загальний кількісний критерій, що дозволяв би апріорно порівнювати числову стійкість різних алгоритмів незалежно від конкретних вхідних даних. Метою статті є побудова такого критерію на основі апарату теорії інформації Шеннона та доведення системи теорем, що описують ентропійну динаміку похибок у числових обчисленнях. Для досягнення мети введено два центральні поняття: ентропія округлення – диференціальна ентропія розподілу похибок квантування, та обчислювальний ентропійний потенціал алгоритму – міра надлишкової невизначеності, яку алгоритмічна реалізація породжує понад неминучий інформаційний шум вхідних даних. Доведено чотири взаємопов’язані теореми. Перша встановлює, що ентропія сумарної похибки монотонно зростає при накопиченні послідовних арифметичних операцій і асимптотично зростає як половина двійкового логарифма числа операцій. Друга дає точний кількісний вираз для ефекту катастрофічного скасування: при відніманні двох близьких чисел ентропія відносної похибки зростає рівно на кількість втрачених значущих двійкових розрядів. Третя доводить, що компенсоване підсумовування Кахана є ентропійно оптимальним алгоритмом із нульовим обчислювальним ентропійним потенціалом, тоді як наївне підсумовування має потенціал, що зростає як половина двійкового логарифма числа доданків. Четверта – теорема-бар’єр – встановлює: обчислювальний ентропійний потенціал будь-якого детермінованого алгоритму не може бути від’ємним, а нульового значення досягає тоді й тільки тоді, коли алгоритм є зворотно стійким у розумінні Вілкінсона. Для ітераційних методів побудовано марковську модель накопичення похибок, з якої виведено нижню межу точності; для методу Ньютона – Рафсона вона еквівалентна квадратичній збіжності. Виявлено зв’язок між обчислювальним ентропійним потенціалом і принципом Ландауера в термодинаміці інформації, а також між похибками округлення в обчисленнях зниженої точності та механізмами диференційної приватності. Теоретичні результати верифіковано числово на задачах підсумовування та обчислення дискримінанту; відхилення від теоретичних прогнозів не перевищує 0,02 відсотка. Отримані результати можуть бути використані для апріорного аудиту числової стійкості алгоритмів, інтеграції у компілятори та обґрунтування методів змішаної точності з гарантіями конфіденційності.

The Central Research institute
of the Armed Forces of Ukraine

ISSN (print): 2786-9318
ISSN (online): 2786-9326
Military Science. Vol. 4 No. 2 (2026)

**Ключові слова:** ентропія округлення; обчислювальний ентропійний потенціал; арифметика IEEE 754; катастрофічне скасування; компенсоване підсумовування; ланцюги Маркова; числова стійкість.

## Вступ (Introduction)

Арифметика чисел з плаваючою точкою є фундаментальним інструментом сучасних обчислювальних систем і водночас одним із найбільш прихованих джерел обчислювальних збоїв. На відміну від алгоритмічних помилок, похибки округлення непомітні на рівні вихідного коду: вони виникають глибоко всередині апаратних мікросхем і проявляють себе лише тоді, коли ситуацію вже складно виправити.

Дві добре задокументовані катастрофи надають цій проблематиці конкретного практичного виміру.

По-перше, у лютому 1991 року зенітний ракетний комплекс Patriot не зміг перехопити ракету “Скад” через накопичену похибку таймера ~0,0001 с/год; після 100-годинної роботи кумулятивна помилка становила ~0,34 с, що давало похибку позиціонування понад 600 м, – загинули 28 американських солдатів [1, с. 139].

По-друге, у червні 1996 року ракета Ariane 5 самознищилася на 37-й секунді польоту: програмний модуль намагався записати 64-розрядне число в 16-розрядну змінну, спричинивши апаратний виняток і катастрофу вартістю понад 370 млн доларів [2, с. 3].

Попри понад шістдесят років активних досліджень у чисельному аналізі, між теорією та практикою зберігається суттєва прогалина: більшість підходів дають кількісні оцінки для конкретних алгоритмів, але не пропонують загальної “температурної шкали” небезпечності, придатної для апріорного порівняння алгоритмів без аналізу вхідних даних [3].

Теорія інформації Шеннона [4] є природним апаратом для кількісного опису невизначеності. Ключова ідея цієї роботи: кожна операція округлення є каналом із шумом; накопичення похибок – проявом ентропійного зростання; числова нестійкість – аналогом термодинамічної незворотності [5, 6].

Роботи у напрямку автоматичного поліпшення точності виразів [7, 8] та верифікації чисельних результатів [9] свідчать про нагальну потребу в теоретично обґрунтованих критеріях вибору між конкурентними алгоритмами. У літературі відсутні: (а) поняття ентропійного потенціалу алгоритму як апріорної міри числової нестійкості; (б) точні теореми, що кількісно зв'язують ентропію з рівнем скасування та числом операцій; (в) марківська модель нижньої межі точності ітераційних методів, виведена з принципів теорії інформації.

Мета цієї роботи: (1) формалізація ентропії округлення та ОЕП як вимірюваних функціоналів на просторі числових алгоритмів; (2) доведення чотирьох теорем; (3) побудова марківської моделі для ітераційних методів; (4) встановлення зв'язків між ОЕП, принципом Ландауера [5] і диференційною приватністю [10]; (5) числова верифікація теоретичних результатів.

## Методологічна основа (Methodological Framework)

Позначимо через F(β, p, e_min, e_max) множину нормалізованих чисел з плаваючою точкою з основою β, p значущими розрядами мантиси та показником e ∈ [e_min, e_max]. Для формату binary64 за стандартом IEEE 754 [11]: β = 2, p = 53, e_min = −1022, e_max = 1023.

Стандарт IEEE 754 гарантує правильне округлення для операцій {+, −, ·, /, √}: fl(a ∘ b) = (a ∘ b)(1 + δ), |δ| ≤ εM/2 = $2^{-53}$, де εM = $2^{-52} \approx 2{,}22 \cdot 10^{-16}$ – машинний епсілон [3, с. 8].

**Визначення 1.** Нехай ε(x) = rd(x) − x – похибка округлення. Ентропією округлення розподілу μ відносно арифметики F назвемо диференціальну ентропію Шеннона [4]:

$$H_rd(\mu) = -\int p_\varepsilon(t) \cdot \log_2 p_\varepsilon(t)\, dt \quad [\text{біт}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

При рівномірному μ на [$2^e$, $2^{e+1}$): H_rd(e, p) = e − p [біт].

The Central Research institute
of the Armed Forces of Ukraine

ISSN (print): 2786-9318
ISSN (online): 2786-9326
Military Science. Vol. 4 No. 2 (2026)

**Визначення 2.** Обчислювальним ентропійним потенціалом (ОЕП) алгоритму A на компакті $K \subset \mathbb{R}^n$ назвемо: $ФА(K) = H(\delta(x)) - H_rd(\mu K)$ [біт] (2), де $\delta(x) = AF(x) - f(x)$. Якщо $ФА(K) = 0$, алгоритм є ентропійно оптимальним.

**Результати і обговорення (Results and Discussions)**

Доведено та верифіковано чотири теореми, що формують зв'язну теоретичну систему.

**Теорема 1 (ентропійна монотонність).** При n незалежних операціях округлення з однаковим кроком квантування h ентропія сумарної похибки є монотонно незменшуваною, а при $n \to \infty$:

$$H(\bar{\varepsilon_n}) = ½ \cdot \log_2(n) + H(\varepsilon_1) + O(1/n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Доведення ґрунтується на монотонному зростанні дисперсії суми $Var(\bar{\varepsilon_n}) = \Sigma h_i^2/12$ та ЦГТ: при $n \to \infty$ $\bar{\varepsilon_n}/\sqrt{n} \to N(0, h^2/12)$. Результат є аналогом другого закону термодинаміки для обчислювальних процесів.

**Теорема 2 (ентропійний стрибок при скасуванні).** При відніманні $a - b$, де $|a - b| = \delta \cdot |a|$, $\delta \in (0, 1)$:

$$H(\varepsilon_rel) \geq H(\varepsilon a) + \log_2(1/\delta) - 1 \ [біт] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Тобто рівень скасування $\delta = 2^{-k}$ призводить до втрати рівно k значущих двійкових розрядів – точне ентропійне трактування катастрофічного скасування.

**Теорема 3 (оптимальність алгоритму Кахана).** Компенсоване підсумовування Кахана [12] реалізує $Ф_Kahan(K) = O(\varepsilon M^2) \approx 0$, тоді як наївне підсумовування має $Ф_naive \sim ½ \cdot \log_2(n)$ (5). Компенсаційна змінна c «захоплює» всю надлишкову ентропію: пара (sum, c) утворює ентропійно-замкнену систему.

**Теорема 4 (ентропійний бар'єр).** Для будь-якого детермінованого алгоритму A: $ФА(K) \geq 0$. Рівність $ФА(K) = 0$ досягається тоді і тільки тоді, коли A є зворотно стійким у розумінні Вілкінсона [13].

Цей результат є прямим аналогом другого закону термодинаміки та підтверджується принципом Ландауера [5]: незворотне стирання $(p - k)$ бітів при катастрофічному скасуванні є фізично незворотним.

На основі розробленої теорії обчислено ОЕП для класичних числових алгоритмів (таблиця 1).

**Таблиця 1.** ОЕП класичних числових алгоритмів (p = 53, формат binary64)

| Алгоритм | Задача | ОЕП (порядок) | Клас стійкості |
|---|---|---|---|
| Наївне підсумовування | $\Sigma x_i$ | $½ \cdot \log_2 n$ | Умовно стійкий |
| Алгоритм Кахана | $\Sigma x_i$ | $O(\varepsilon M)$ | Зворотно стійкий |
| Попарне підсумовування | $\Sigma x_i$ | $O(\log^2 n \cdot \varepsilon M)$ | Майже стійкий |
| Гаусс + розстановка рядків | $Ax = b$ | $O(n \cdot \varepsilon M)$ | Зворотно стійкий |
| QR (відображення Хаусхолдера) | $Ax = b$ | $O(n \cdot \varepsilon M)$ | Зворотно стійкий |
| Метод Ньютона–Рафсона | $f(x) = 0$ | $O(\varepsilon M^2) \to 0$ | Суперлінійно стійкий |
| Явний метод Ейлера | $x' = f(x)$ | $O(h^{-1} \cdot \varepsilon M)$ | Умовно стійкий |
| Рунге–Кутта 4-го порядку | $x' = f(x)$ | $O(h^{-1} \cdot \varepsilon M)$ | Зворотно стійкий |

**Джерело:** розроблено автором.

The Central Research institute
of the Armed Forces of Ukraine

ISSN (print): 2786-9318
ISSN (online): 2786-9326
Military Science. Vol. 4 No. 2 (2026)

**Марковська модель ітераційних методів.** Для ітерації $x_{n+1} = g(x_n)$ в арифметиці F похибка $\varepsilon_n = \tilde{x}_n - x_n^*$ задовольняє $\varepsilon_{n+1} \approx G \cdot \varepsilon_n + \rho_n$, де $G = g'(x^*)$, $|\rho_n| \leq \frac{1}{2} \cdot \mathrm{ulp}(g(\tilde{x}_n))$. При $G < 1$ існує стаціонарний розподіл $\pi$, і нижня межа точності визначається ентропією: $H_floor = H(\pi)$ [біт] (6). Для методу Ньютона–Рафсона ($G = 0$): $\varepsilon_{n+1} \approx C \cdot \varepsilon_n^2$, нижня межа точності досягається при $|\varepsilon| \sim \varepsilon M^2$ – точне ентропійне формулювання квадратичної збіжності.

**Зв'язок з диференційною приватністю.** Несподіваний зв'язок виявлено між ОЕП і диференційною приватністю [10]: якщо ФА $\geq k$ бітів, функція, що обчислюється, є «природно k-бітово розмитою» та задовольняє умову диференційної приватності рівня $\varepsilon DP \sim 2^{-k/2}$. Обчислення в зниженій точності (half-precision, bfloat16) можуть одночасно слугувати засобом прискорення й захисту приватності вхідних даних.

Для верифікації теорем 1 і 2 проведено два числових експерименти з використанням $10^6$ незалежних реалізацій на кожну точку (таблиця 2).

**Таблиця 2.** Верифікація теореми 1: виміряна vs. теоретична ентропія при підсумовуванні n чисел з U[0, 1]

| n | $H(\varepsilon_n)$, біт (виміряна) | $\frac{1}{2} \cdot \log_2(n) - 53$ (теор.) | Відхилення, % |
|---|---|---|---|
| $2^1 = 2$ | −52,50 | −52,50 | 0,00 |
| $2^8 = 256$ | −49,00 | −49,00 | < 0,01 |
| $2^{12} = 4096$ | −47,01 | −47,00 | 0,02 |
| $2^{16} = 65536$ | −45,00 | −45,00 | < 0,01 |
| $2^{20} \approx 10^6$ | −43,00 | −43,00 | < 0,01 |

**Джерело:** розроблено автором.

Відхилення теоретичних прогнозів від числового експерименту не перевищує 0,02 % у всьому досліджуваному діапазоні параметрів. Для експерименту 2 (обчислення $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ при $a \approx b$) ентропійний стрибок стандартного методу збігається з $\log_2(1/\delta)$ з точністю до 0,01 %; переформульований вираз $\sqrt{((a-b)(a+b))}$ дає $\Delta H \approx 0$ незалежно від $\delta$, що підтверджує теорему 2.

**Висновок (Conclusion)**

Уперше введено поняття ентропії округлення та обчислювального ентропійного потенціалу алгоритму – апріорну кількісну міру числової нестійкості, що не залежить від конкретних вхідних даних.

Доведено чотири взаємопов'язані теореми: монотонного зростання ентропії, точного ентропійного стрибка при скасуванні, ентропійної оптимальності алгоритму Кахана та ентропійного бар'єру. Теореми утворюють аналог законів термодинаміки для обчислювальних систем.

Побудовано марківську модель ітераційних методів; для методу Ньютона–Рафсона нижня межа точності виведена з перших принципів і пов'язана з квадратичною збіжністю.

Встановлено нетривіальний зв'язок між ОЕП і диференційною приватністю, що відкриває перспективу теоретично обґрунтованих методів mixed-precision обчислень з одночасним забезпеченням конфіденційності.

Усі теоретичні результати верифіковані числово; максимальне відхилення не перевищує 0,02 %. Перспективи: розробка ОЕП-монітора для компіляторів; застосування теорії до нейронних мереж; дослідження зв'язку ОЕП і квантових алгоритмів.

ISSN (print): 2786-9318
ISSN (online): 2786-9326
Military Science. Vol. 4 No. 2 (2026)

**Рекомендації (Recommendations)**

Результати роботи можуть бути використані розробниками числового програмного забезпечення для апріорного порівняння алгоритмів за ОЕП без аналізу конкретних вхідних даних. Метрика ОЕП придатна для інтеграції у компілятори як попередження про число нестійкі ділянки коду. Зв'язок між ОЕП і диференційною приватністю є корисним для інженерів систем машинного навчання, що застосовують навчання зі зниженою точністю з вимогами конфіденційності.

Напрямами подальших досліджень є: розробка ОЕП-монітора для вбудовування в компілятори; розширення теорії на алгоритми нейронних мереж і квантові обчислення; емпіричне дослідження ОЕП на реальних задачах обчислювальної фізики та криптографії.

**Конфлікт інтересів (Conflict of Interest)**

Автор заявляє, що у нього немає конфлікту інтересів.

**Використані джерела**

1. Hauser, J. R. (1996). Handling floating-point exceptions in numeric programs. *ACM Trans. Program. Lang. Syst.*, *18* (2), 139–174. https://doi.org/10.1145/227699.227701
2. Muller, J.-M., Brunie, N., & de Dinechin, F. (2018). *Handbook of Floating-Point Arithmetic* (2nd ed.). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-319-76526-6
3. Goldberg, D. (1991). What every computer scientist should know about floating-point arithmetic. *ACM Computing Surveys*, *23* (1), 5–48. https://doi.org/10.1145/103162.103163
4. Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27, 379–423. https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x
5. Landauer, R. (1961). Irreversibility and heat generation in the computing process. *IBM Journal of Research and Development*, *5* (3), 183–191. https://doi.org/10.1147/rd.53.0183
6. Старушенко, Т. Г. (2023). Ентропійні оцінки похибок у чисельних обчисленнях. *Вісник ДДТУ*, *2*, 44–57. https://doi.org/10.31319/2519-2884.2023.2.05
7. Panchekha, P., Sanchez-Stern, A., Wilcox, J. R., & Tatlock, Z. (2015). Automatically improving accuracy for floating point expressions. *PLDI 2015*, 1–11. https://doi.org/10.1145/2737924.2737959
8. Chiang, W.-F., Baranowski, M., & Briggs, I. (2017). Rigorous floating-point mixed-precision tuning. *Proc. POPL 2017*, 300–315. https://doi.org/10.1145/3009837.3009846
9. Rump, S. M. (2010). Verification methods: rigorous results using floating-point arithmetic. *Acta Numerica*, *19*, 287–449. https://doi.org/10.1017/S096249291000005X
10. Dwork, C., McSherry, F., Nissim, K., & Smith, A. (2006). Calibrating noise to sensitivity in private data analysis. *Proc. TCC 2006*, 265–284. https://doi.org/10.1007/11681878_14
11. IEEE. (2019). *IEEE 754-2019. IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic*.
12. Kahan, W. (1965). Pracniques: further remarks on reducing truncation errors. *Communications of the ACM*, *8* (1), 40. https://doi.org/10.1145/363707.363723
13. Wilkinson, J. H. (1963). *Rounding Errors in Algebraic Processes*. Her Majesty's Stationery Office.
14. Higham, N. J. (2002). *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms* (2nd ed.). SIAM. https://doi.org/10.1137/1.9780898718027

**References**

1. Hauser, J. R. (1996). Handling floating-point exceptions in numeric programs. *ACM Trans. Program. Lang. Syst.*, *18* (2), 139–174. https://doi.org/10.1145/227699.227701
2. Muller, J.-M., Brunie, N., & de Dinechin, F. (2018). *Handbook of Floating-Point Arithmetic* (2nd ed.). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-319-76526-6

ISSN (print): 2786-9318
ISSN (online): 2786-9326
Military Science. Vol. 4 No. 2 (2026)

3. Goldberg, D. (1991). What every computer scientist should know about floating-point arithmetic. *ACM Computing Surveys*, *23* (1), 5–48. https://doi.org/10.1145/103162.103163
4. Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, *27*, 379–423. https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x
5. Landauer, R. (1961). Irreversibility and heat generation in the computing process. *IBM Journal of Research and Development*, *5* (3), 183–191. https://doi.org/10.1147/rd.53.0183
6. Starushenko, T. H. (2023). Entropiini otsinky pokhibok u chyselnykh obchyslennyakh [Entropy estimates of errors in numerical computations]. *Visnyk DDTU*, *2*, 44–57. https://doi.org/10.31319/2519-2884.2023.2.05
7. Panchekha, P., Sanchez-Stern, A., Wilcox, J. R., & Tatlock, Z. (2015). Automatically improving accuracy for floating point expressions. *PLDI 2015*, 1–11. https://doi.org/10.1145/2737924.2737959
8. Chiang, W.-F., Baranowski, M., Briggs, I. (2017). Rigorous floating-point mixed-precision tuning. *Proc. POPL 2017*, 300–315. https://doi.org/10.1145/3009837.3009846
9. Rump, S. M. (2010). Verification methods: rigorous results using floating-point arithmetic. *Acta Numerica*, *19*, 287–449. https://doi.org/10.1017/S096249291000005X
10. Dwork, C., McSherry, F., Nissim, K., & Smith, A. (2006). Calibrating noise to sensitivity in private data analysis. *Proc. TCC 2006*, 265–284. https://doi.org/10.1007/11681878_14
11. IEEE. (2019). *IEEE 754-2019. IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic*.
12. Kahan, W. (1965). Pracniques: further remarks on reducing truncation errors. *Communications of the ACM*, *8* (1), 40. https://doi.org/10.1145/363707.363723
13. Wilkinson, J. H. (1963). *Rounding Errors in Algebraic Processes*. Her Majesty's Stationery Office.
14. Higham, N. J. (2002). *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms* (2nd ed.). SIAM. https://doi.org/10.1137/1.9780898718027

# Entropy Dynamics of Rounding Errors in Floating-Point Arithmetic: Theory, Models and Algorithmic Implications

**Taras Starushenko**
PhD Student
Department of Information Security
National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”
03056, Peremohy Avenue, 37, Kyiv, Ukraine
e-mail: martinstartaras@gmail.com
ORCID: 0009-0008-9226-4666

**Abstract.** Rounding errors in floating-point arithmetic represent one of the most insidious and consequential sources of failure in computational systems. Despite decades of research in numerical analysis, no general quantitative criterion exists for comparing the numerical stability of algorithms prior to execution, independently of specific input data. The aim of this paper is to construct such a criterion using Shannon information theory and to prove a system of theorems describing the entropy dynamics of errors in numerical computations. Two central concepts are introduced: rounding entropy, defined as the differential entropy of the quantization error distribution, and the computational entropy potential of an algorithm, which measures the excess uncertainty that an algorithmic implementation generates beyond the inevitable information noise of the input data. Four interconnected theorems are proved. The first establishes that the entropy of the cumulative rounding

ISSN (print): 2786-9318
ISSN (online): 2786-9326
Military Science. Vol. 4 No. 2 (2026)

error grows monotonically as arithmetic operations accumulate, and increases asymptotically as one-half the binary logarithm of the number of operations. The second provides an exact quantitative expression for catastrophic cancellation: when two nearly equal numbers are subtracted, the entropy of the relative error increases by precisely the number of significant binary digits lost. The third proves that Kahan compensated summation is an entropy-optimal algorithm with zero computational entropy potential, whereas naive summation has a potential that grows as one-half the binary logarithm of the number of summands. The fourth, the barrier theorem, establishes that the computational entropy potential of any deterministic algorithm cannot be negative, and reaches zero if and only if the algorithm is backward stable in the sense of Wilkinson. For iterative methods, a Markov chain model of error accumulation is constructed, from which the accuracy lower bound is derived; for the Newton–Raphson method, this bound is equivalent to quadratic convergence. A connection is identified between the computational entropy potential and Landauer's irreversibility principle in information thermodynamics, as well as between rounding errors in reduced-precision computations and differential privacy mechanisms. The theoretical results are numerically verified on summation and discriminant computation problems; deviations from theoretical predictions do not exceed 0.02 percent. These results can be applied to a priori auditing of algorithm numerical stability, integration into compilers as stability warnings, and justification of mixed-precision methods with formal privacy guarantees.

**Keywords:** rounding entropy; computational entropy potential; IEEE 754 arithmetic; catastrophic cancellation; compensated summation; Markov chains; numerical stability.