Центральний науково-дослідний інститут
Збройних Сил України
Military Science. Vol. 1 No. 1. 2023

Підхід до оцінювання протиборчих сторін у часі на основі аналітичного розв'язання системи нелінійних диференціальних рівнянь методу динаміки середніх

Анатолій Зварич
кандидат військових наук, старший дослідник
провідний науковий співробітник
Центральний науково-дослідний інститут Збройних Сил України
03049, Повітрофлотський проспект, 28 Б, Київ, Україна
e-mail: zvarych_ao@ukr.net
ORCID: 0000-0002-7136-0295

Світлана Зварич
кандидат технічних наук, старший дослідник
старший науковий співробітник
Центральний науково-дослідний інститут Збройних Сил України
03049, Повітрофлотський проспект, 28 Б, Київ, Україна
e-mail: zvarych.ss@gmail.com
ORCID: 0000-0002-0636-250X

Анотація. Актуальність даного дослідження обумовлена необхідністю аналітичного аналізу військового протиборства (як складової частини воєнної безпеки), де досліджується конфлікт, який розвивається швидкоплинно у часі. Він може бути описаний нелінійними рівняннями Ланчестера. Аналітичний аналіз здійснюється у двох напрямах. Згідно з першим із них установлюється формульний взаємозв'язок вихідного співвідношення сил із заданими критеріальними величинами. Вираз отримано у вигляді залежності біквадратного характеру. Другий напрям стосується аналітичної оцінки часу досягнення кінцевої мети дій однієї зі сторін у конфлікті, де вихідна система за допомогою спеціального перетворення зводиться до одного нелінійного диференціального рівняння першого порядку, що має розв'язок для параметра часу за допомогою табличних інтегралів. Метою статті є розроблення підходу для визначення початкового співвідношення вогневих засобів протиборчих сторін, а також прогнозованого часу ведення ними бойових дій, за яких забезпечується допустимий рівень втрат однієї зі сторін та досягається задане кінцеве співвідношення їхніх вогневих засобів. Відомі підходи, що ґрунтуються на методі динаміки середніх, передбачають отримання необхідних початкових співвідношень сил та засобів протиборчих сторін з використанням моделей, що описують конфлікти певної інтенсивності на основі лінійних диференціальних рівнянь із **незмінним** уражаючим впливом при заданих (допустимих) втратах. Водночас, застосування для опису бойових дій математичних моделей на основі систем нелінійних диференціальних рівнянь дозволяє враховувати інтенсивність уражаючого впливу, яка змінюється в ході бойових дій, що є більш характерним для сучасних воєнних конфліктів. Нині розв'язання систем таких рівнянь зазвичай здійснюється з використанням чисельних методів, що є достатньо трудомістким завданням. У статті наведено підхід, який засновано на аналітичному розв'язанні системи нелінійних диференціальних рівнянь методу динаміки середніх, що **враховує** інтенсивність уражаючого впливу, яка змінюється в ході бойових дій. Це дає можливість оперативно розраховувати показники, які може бути використано під час планування операції (бойових дій) (зокрема, під час обґрунтування потрібного складу

угруповань військ (сил) та часу проведення операції (бойових дій)). За допомогою розробленого підходу можна обчислювати початкове співвідношення вогневих засобів протиборчих сторін, а також прогнозований час ведення ними бойових дій, за яких забезпечується допустимий рівень втрат однієї зі сторін та досягається задане кінцеве співвідношення їхніх вогневих засобів. Можливість використання цього підходу підтверджено розрахунковим прикладом.

Ключові слова: аналітичний аналіз, математична модель, динаміка, бойові дії, конфлікт, співвідношення.

Вступ (Introduction)

Прикладні дослідження у предметній області протидії сторін, що конфліктують, досить багатогранні і стосуються широкого кола взаємозалежних процесів, які потребують значних за обсягом розрахунків. В основу аналітичних розрахунків покладено методи математичного аналізу (диференціального та інтегрального числення) з наступним виходом в область теорії оптимального управління (Котляров, 2020), насамперед у тій її частині, що стосується вибору однією зі сторін конфлікту найкращих (необхідних) для неї параметрів процесу або їх оптимальних співвідношень, наприклад, співвідношення сил протягом усього часу конфлікту. При оцінюванні цього параметра найбільш актуальним є питання щодо визначення необхідного початкового співвідношення вогневих засобів протиборчих сторін та прогнозованого часу ведення ними бойових дій, за яких забезпечується допустимий рівень втрат однієї зі сторін та досягається задане співвідношення їх вогневих засобів. Саме з позиції кількісного оцінювання всіх даних величин стосовно конфліктів різної інтенсивності (найменш вивчених у спеціальній літературі) і буде викладено матеріал статті.

Необхідно підкреслити, що в основному існуючі методики розрахунку співвідношення сил ґрунтуються на оцінюванні бойових можливостей протидіючих угруповань, які знаходять шляхом підсумовування їхніх бойових потенціалів (Леонтьєв, 2009), (Загорка, 2020). Тоді припустиме початкове співвідношення сил сторін знаходять із урахуванням величини коефіцієнта бойової достатності.

Подібний підхід розглянутий в (Леонтьєв, 2009), (Можаровський, 2019) при викладі методу статичного моделювання для визначення бойового потенціалу угруповань військ (сил). Однак, що стосується величини коефіцієнта бойової достатності, то вона звичайно визначається на основі досвіду війн і військових конфліктів і має досить широкий діапазон зміни. До того ж, дана статичне завдання має деяку незавершеність і в плані аналітичного взаємозв'язку в часі необхідного початкового співвідношення сил з кінцевим необхідним значенням відповідних показників на момент завершення бойових дій.

Для вирішення цього завдання може використовуватись метод динаміки середніх. Застосувавши цей метод для моделей, що описують конфлікти різної інтенсивності на основі лінійних диференціальних рівнянь із незмінним уражаючим впливом були отримані відповідні математичні залежності (Вентцель, 1964), (Загорко, 2020), (Романченко, 2022).

Водночас, вивчення досвіду відсічі збройній агресії рф проти України (Tom Cooper, 2022), (Залужний, 2023), показує, що інтенсивність уражаючого впливу протиборчих сторін змінюється для умов тривалих бойових дій у разі недостатньої кількості сил і засобів для ведення стрімкого наступу (наступальна операція на Херсонському напрямку) або швидкоплинних бойових дій (наступальна операція на Харківському напрямку). Для урахування таких умов бойових дій краще використовувати математичні моделі на основі систем нелінійних диференціальних рівнянь. На цей час розв’язання систем таких рівнянь зазвичай здійснюється з використанням чисельних методів, що є достатньо трудомістким завданням, що потребує тривалого часу, наявності спеціальної техніки, програмного

забезпечення і значних за обсягом вихідних даних.

Метою статті є розроблення підходу для визначення початкового співвідношення вогневих засобів протиборчих сторін, а також прогнозованого часу ведення ними бойових дій, за яких забезпечується досягнення допустимого рівня втрат однієї зі сторін та досягається задане кінцеве співвідношення їхніх вогневих засобів.

Методологічна основа (Methodological Framework)

У першу чергу, формалізуємо постановку задачі, яка буде розв'язуватись.

Нехай є дві сторони конфлікту – *A* і *B*.

Заданими величинами є: для сторони *A* – початкова кількість вогневих засобів *A(0)* та усереднена інтенсивність ефективного уражаючого впливу α; для сторони *B* – усереднена інтенсивність ефективного уражаючого впливу β.

Крім того, задаються такі обмеження на момент часу $t = T$ проведення операції (бойових дій):

$$\begin{cases} K(t) = K(T)_{необх}; \\ R(t) = R(T)_{доп}, \end{cases} \tag{1}$$

де $K(T)_{необх}$ – кінцеве співвідношення вогневих засобів сторін, якого необхідно досягти;

$R(T)_{доп}$ – допустимий рівень втрат вогневих засобів для сторони *B*.

Потрібно визначити необхідне початкове співвідношення кількості вогневих засобів сторін $K(0)_{необх}$ і прогнозований час проведення операції (бойових дій) *T*, за яких виконуються обмеження (1).

При цьому динаміка зміни чисельності вогневих засобів протиборчих сторін описується системою нелінійних диференціальних рівнянь, що враховує інтенсивність уражаючого впливу, яка змінюється в ході бойових дій. Відповідно до (Вентцель, 1964), (Машкін, 2019), (Романченко, 2022) вона записується у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{dA(t)}{dt} = -f_B(t)B(t); \\ \dfrac{dB(t)}{dt} = -f_A(t)A(t), \end{cases} \tag{2}$$

де $A(t), B(t)$ – кількість вогневих засобів угруповань протиборчих сторін;

$\dfrac{dA(t)}{dt}$, $\dfrac{dB(t)}{dt}$ – динаміка зміни кількості вогневих засобів протиборчих сторін у часі;

$f_A(t), f_B(t)$ – інтенсивності уражаючого впливу вогневих засобів протиборчих сторін (нелінійні величини). Згідно з (Романченко, 2022) $f_A(t) = \alpha \dfrac{A(t)}{B(t)}$, $f_B(t) = \beta \dfrac{B(t)}{A(t)}$;

t – поточний час проведення операції (бойових дій).

Підхід, що пропонується, передбачає проведення розрахунків у два етапи.

На першому етапі визначається необхідне початкове співвідношення вогневих засобів сторін $K(0)_{необх}$.

Уведемо до розгляду показники, які характерні для оцінювання протиборчих сторін. До

таких показників, насамперед, належить величина співвідношення кількості вогневих засобів протиборчих сторін:

$$K(t)=\frac{A(t)}{B(t)},$$

оцінювання якої має важливе значення як на початковій стадії проведення операції (бойових дій), так і на кінцевій стадії у момент часу $t=T$. Формалізуємо це такими залежностями:

$$K(0)=\frac{A(0)}{B(0)}; \qquad K(T)=\frac{A(T)}{B(T)}, \tag{3}$$

де $K(0)$ – початкове співвідношення вогневих засобів протиборчих сторін при *t=0;*

$K(T)$ – співвідношення вогневих засобів протиборчих сторін на момент часу $t=T$.

Уведемо показник:

$$R(T)=\frac{B(0)-B(T)}{B(0)}, \tag{4}$$

який характеризує відносні втрати сторони *B* на момент часу $t=T$.

Розділивши перше рівняння системи (2) на друге, отримаємо:

$$\frac{dA(t)}{dB(t)}=\frac{\beta}{\alpha}\frac{B^3(t)}{A^3(t)}. \tag{5}$$

Звідки, провівши інтегрування, отримаємо:

$$A^4(t)=\frac{\beta}{\alpha}B^4(t)+C, \tag{6}$$

де *C* – довільна постійна інтегрування.

Вираз (6) справедливий для будь-якого моменту часу і, таким чином, у загальному вигляді встановлює аналітичний взаємозв’язок між кількістю вогневих засобів протиборчих сторін. Тоді вираз (6) для початку операції (бойових дій) може бути записано у вигляді:

$$A^4(0)=\frac{\beta}{\alpha}B^4(0)+C, \tag{7}$$

а для моменту часу $t=T$:

$$A^4(T)=\frac{\beta}{\alpha}B^4(T)+C. \tag{8}$$

Виключаючи із залежностей (7), (8) постійну інтегрування *C* і враховуючи співвідношення

(3), (4), отримаємо загальну залежність для $K(0)$:

$$K(0) = \sqrt[4]{K^4(T)(1-R(T))^4 + \frac{\beta}{\alpha}(1-(1-R(T))^4)}. \quad (9)$$

Замінюючи в (9) величини $K(T)$ та $R(T)$ їхніми необхідними значеннями $K(T)_{необх}$ та $R(T)_{доп}$, отримаємо формулу для визначення необхідного початкового співвідношення вогневих засобів протиборчих сторін за заданих обмежень (1):

$$K(0)_{необх} = \sqrt[4]{K^4(T)_{необх}(1-R(T)_{доп})^4 + \frac{\beta}{\alpha}(1-(1-R(T)_{доп})^4)}. \quad (10)$$

На другому етапі визначається прогнозований час проведення операції (бойових дій), за тих самих обмежень (1).

Із урахуванням виразів (3), (4), знайдемо величину постійної інтегрування з рівняння (8):

$$C = K^4(T)B^4(0)(1-R(T))^4 - \frac{\beta}{\alpha}B^4(0)(1-R(T))^4. \quad (11)$$

Із (6), з урахуванням (11), отримаємо:

$$A^2(t) = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{B^4(t) + \frac{\alpha}{\beta}K^4(T)B^4(0)(1-R(T))^4 - B^4(0)(1-R(T))^4}. \quad (12)$$

Для зручності введемо позначення:

$$D = \frac{\alpha}{\beta}K^4(T)B^4(0)(1-R(T))^4 - B^4(0)(1-R(T))^4. \quad (13)$$

Підставимо (12), з урахуванням (13), у друге рівняння системи (2). Тоді отримаємо:

$$\frac{dB(t)}{dt} = -\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{B(t)}\sqrt{B^4(t)+D}, \quad (14)$$

звідки

$$dt = -\frac{B(t)dB(t)}{\sqrt{\alpha\beta}\sqrt{B^4(t)+D}}. \quad (15)$$

Інтегруючи вираз (15), знайдемо залежність:

$$t = -\frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}}\ln\left|B^2(t) + \sqrt{B^4(t)+D}\right| + C_1. \quad (16)$$

У залежності (16) постійна інтегрування C_1 визначається з початкових умов ($t=0$):

$$C_1 = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \ln\left|B^2(0) + \sqrt{B^4(0) + D}\right|. \quad (17)$$

Тоді для t вираз (16) запишемо у вигляді:

$$t = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \ln\left|\frac{B^2(0) + \sqrt{B^4(0) + D}}{B^2(t) + \sqrt{B^4(t) + D}}\right|. \quad (18)$$

З урахуванням виразу (3), необхідна початкова кількість вогневих засобів $B(0)_{необх}$ для сторони B за відомого початкового значення $A(0)$ для сторони A і отриманого значення $K(0)_{необх}$ обчислюється за формулою:

$$B(0)_{необх} = \frac{A(0)}{K(0)_{необх}}. \quad (19)$$

На момент часу $t = T$ із виразу (4) можемо отримати розрахункову кількість вогневих засобів для сторони B:

$$B(T)_{розр} = B(0)_{необх}(1 - R(T)_{доп}). \quad (20)$$

Тоді, з урахуванням виразу (18), отриманих значень $B(0)_{необх}$ та $B(T)_{розр}$, дістанемо прогнозований час проведення операції (бойових дій) за заданих обмежень (1):

$$T = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \ln\left|\frac{B^2(0)_{необх} + \sqrt{B^4(0)_{необх} + D^*}}{B^2(T)_{розр} + \sqrt{B^4(T)_{розр} + D^*}}\right|. \quad (21)$$

де $D^* = \frac{\alpha}{\beta} K^4(T)_{необх} B^4(0)_{необх}(1 - R(T)_{доп})^4 - B^4(0)_{необх}(1 - R(T)_{доп})^4$.

Зазначимо, що весь наведений алгоритм аналітичного дослідження системи (2) може бути розповсюджений і на інші випадки збройного протистояння, включаючи дії підрозділів на тактичному рівні.

Результати (Results)

Отже, виведенням формул (10) і (21) досягається мета статті.

Для підтвердження коректності отриманих виразів (10) та (21) порівняємо результати розрахунку за ними та результати чисельного інтегрування системи (2).

Виберемо для розрахунку такий набір вихідних даних. Відома початкова кількість вогневих засобів $A(0) = 2270$ *умов. од* для сторони A та інтенсивності ефективного уражаючого впливу $\alpha = 0{,}01$ *умов.од./доба* і $\beta = 0{,}03$ *умов.од./доба*, для моменту часу $t = T$ задано необхідне співвідношення кількості вогневих засобів сторін $K(T)_{необх} = 1$ і допустима величина відносних втрат $R(T)_{доп} = 0{,}33$ для сторони B.

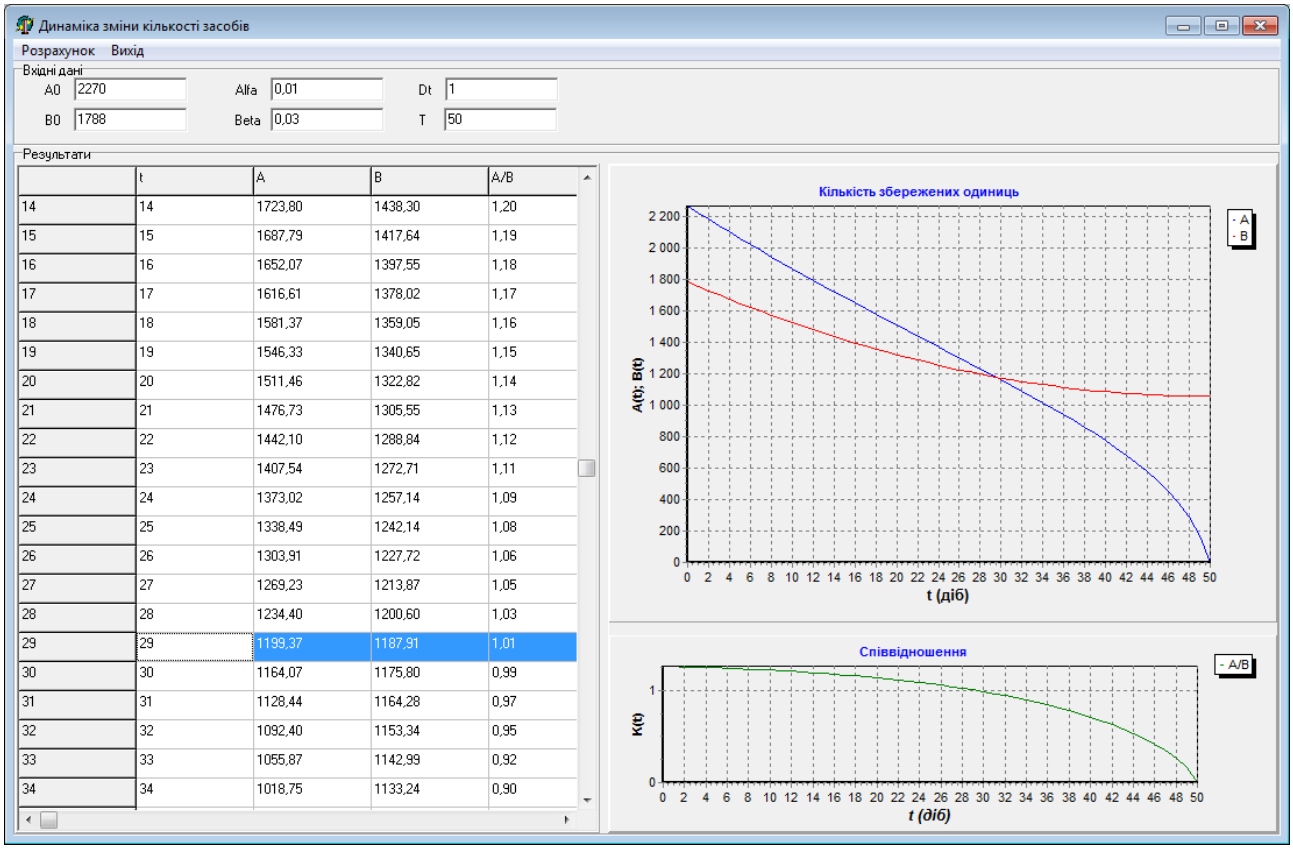
Для умовної операції (бойових дій) протиборчих сторін A та B необхідно знайти:

по-перше, таке початкове співвідношення кількості вогневих засобів, за якого з часом можливе досягнення заданого співвідношення $K(T)_{необх} = 1$, з дотриманням умови щодо допустимої величини відносних втрат $R(T)_{доп} = 0{,}33$ для сторони *B;*

по-друге, прогнозований час проведення операції (бойових дій) T за заданих обмежень.

Підставляючи у (10) значення $K(T)_{необх}$ і $R(T)_{доп}$, знайдемо необхідне початкове співвідношення кількості вогневих засобів $K(0)_{необх} \approx 1{,}3$. За отриманим значенням $K(0)_{необх}$ із (19) знаходимо значення $B(0)_{необх} = 1788\ умов.од.$, за якого виконуються задані обмеження (1). Прогнозований час проведення операції (бойових дій) розраховується за формулою (21) і становить $T \approx 29\ діб.$ Для цього у (21) було використано такі значення: $B(T)_{розр} = 1198\ умов.од.$, отримане з формули (20), з урахуванням, що $B(0)_{необх} = 1788\ умов.од.$, $R(T)_{доп} = 0{,}33$.

Провівши чисельне інтегрування системи (2) при *A(0)* = 2270 *умов. од, B(0)* = 1788 *умов. од* і заданих вище α, β (рис. 1) для тривалості операції (бойових дій) $T \approx 29\ діб$, отримаємо, що $K(T)_{необх} \approx 1$ і $R(T)_{доп} \approx 0{,}33$. Цей результат збігається зі значеннями проведених вище аналітичних розрахунків, що свідчить про коректність оцінок, отриманих на основі виразів (10) і (21), які покладено в основу запропонованого підходу.



	t	A	B	A/B
14	14	1723,80	1438,30	1,20
15	15	1687,79	1417,64	1,19
16	16	1652,07	1397,55	1,18
17	17	1616,61	1378,02	1,17
18	18	1581,37	1359,05	1,16
19	19	1546,33	1340,65	1,15
20	20	1511,46	1322,82	1,14
21	21	1476,73	1305,55	1,13
22	22	1442,10	1288,84	1,12
23	23	1407,54	1272,71	1,11
24	24	1373,02	1257,14	1,09
25	25	1338,49	1242,14	1,08
26	26	1303,91	1227,72	1,06
27	27	1269,23	1213,87	1,05
28	28	1234,40	1200,60	1,03
29	29	1199,37	1187,91	1,01
30	30	1164,07	1175,80	0,99
31	31	1128,44	1164,28	0,97
32	32	1092,40	1153,34	0,95
33	33	1055,87	1142,99	0,92
34	34	1018,75	1133,24	0,90

Рисунок 1. Результати чисельного інтегрування

Під час проведення розрахунків на основі наведеного підходу слід брати до уваги, що опис дій сторін у конфлікті за допомогою систем диференціальних рівнянь є деякою мірою спрощеним. Однак навіть у такому випадку вдається отримати наближені оцінні значення

показників операцій (бойових дій), які може бути використано під час їх планування, зокрема, під час обґрунтування потрібного складу угруповань військ (сил) та часу проведення операції (бойових дій)).

Обговорення (Discussions)

Одним із методів, що дозволяє досліджувати процеси протиборства в динаміці, є метод динаміки середніх (Вентцель, 1964), (Грабчак, Машкін, 2019), (Фурсенко, 2020). У ньому центральне місце посідає модель ведення двосторонніх дій угруповань сторін, що описується системою диференціальних рівнянь. Для систем лінійних диференціальних рівнянь із незмінним уражаючим впливом отримано математичні залежності для визначення необхідних початкового співвідношення вогневих засобів протиборчих сторін і прогнозованого часу ведення ними бойових дій при заданих (допустимих) втратах (Вентцель, 1964), (Загорко, 2020), (Романченко, 2022).

Водночас, для систем нелінійних диференціальних рівнянь, які більш повно описують характер військового протиборства сторін, питання розглянуто частково. Зокрема, формульні залежності отримано тільки для рівнянь, що описують ведення операцій (бойових дій) при повільному зменшенні частки збережених сил і тривалому за часом характеру процесу (Котляров, 2020).

Для систем, що описують операції (бойові дії) в умовах швидкоплинного характеру, у роботі (Романченко, 2022) відзначено важливість питання стосовно визначення аналітичних залежностей, що встановлюють взаємозв’язок початкового співвідношення сил сторін і прогнозованого часу ведення ними (операцій) бойових дій за обмежень щодо допустимого рівня втрат однієї зі сторін і заданого кінцевого співвідношення їхніх вогневих засобів. Однак вирази для таких залежностей не отримано. Знайти зазначені показники важливо під час планування операції (бойових дій), зокрема, під час обґрунтування потрібного складу угруповань військ (сил) та часу проведення операції (бойових дій).

Висновок (Conclusion)

У статті отримав подальший розвиток напрям аналітичного аналізу нелінійних диференціальних рівнянь Ланчестера у вигляді системи (2) для конфлікту, що протікає швидкоплинно за часом. У математичному плані такий конфлікт описується нелінійною моделлю, де в правих частинах диференціальних рівнянь обрана комбінація у вигляді добутку поточних значень показників сил сторін, чим найбільше повно відображається характер динаміки процесу. Таким чином, у статті запропоновано підхід проведення аналітичного аналізу, який запропоновано здійснювати у двох напрямах. Згідно з першим із них установлюється формульний взаємозв’язок вихідного співвідношення сил із заданими критеріальними величинами. Вираз отримано у вигляді залежності біквадратного характеру.

Другий напрям стосується аналітичної оцінки часу досягнення кінцевої мети дій однієї зі сторін у конфлікті, де вихідна система за допомогою спеціального перетворення зводиться до одного нелінійного диференціального рівняння першого порядку, що має розв’язок для параметра часу за допомогою табличних інтегралів.

В основу зазначеного підходу вперше покладено аналітичний розв’язок системи нелінійних диференціальних рівнянь методу динаміки середніх з урахуванням можливого змінювання інтенсивності уражаючого впливу вогневих засобів у ході бойових дій, що є однією з характерних рис сучасних воєнних конфліктів.

Рекомендації (Recommendations)

На відміну від існуючих підходів, представлений підхід дозволяє оперативно проводити розрахунки без зниження їхньої точності на основі отриманих формульних залежностей.

Можливість його використання на практиці продемонстровано відповідним розрахунковим прикладом.

Напрямом подальших досліджень є розроблення рекомендацій щодо порядку застосування наведеного підходу під час планування операції (бойових дій) військових формувань та реалізації його в складі різних комплексів математичних моделей.

Використані джерела

1. Буравлев А.И. (2009). Дифференциальное уравнение для количественного соотношения численностей противоборствующих сил. *Вооружение и экономика, 4(8)*, С. 4-8.
2. Бутвін Б.Л., Машкін О.О. та Соломицький О.І. (2019). Використання модифікованих рівнянь динаміки середніх для оперативного прогнозування ходу та результатів бойових дій. *Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони, 2(35),* С. 115-120.
3. Вентцель Е.С. (1964). Введение в исследование операций. Москва. Советское радио. 388 с.
4. Грабчак В. І., Супрун В.І. та Заскока А.М. (2012) Аналітична модель бою між протидіючими угрупуваннями. *Військово-технічний збірник, 1(6),* С. 110–120.
5. Загорка О. М., Мосов С. П., Сбітнев А. І., Стужук П. І. (2005) Елементи дослідження складних систем військового призначення: науковий посібник для докторантів, ад'юнктів, претендентів і слухачів Національної академії оборони України. К.: НАОУ. 100 с.
6. Загорка О.М., Можаровський В.М., Фролов В.С., Загорка І.О. (2019). Методичний підхід до визначення бойового складу збройних сил воєнного і мирного часу. *Зб. наук. пр. Центру воєнно-стратегічних досліджень Національного університету оборони України імені Івана Черняховського, 1(65)*, С.6-11.
7. Загорка О.М., Поліщук С.В., Загорка І.О. (2020). Методичні положення прогнозування втрат сил протидіючих сторін у загальновійськовій операції (бою). *Журн. "Наука і оборона", 1.* Київ. С.52–57.
8. Кацалап В.О. (2013). Методика оцінки динаміки зміни бойового потенціалу протидіючих сторін. *Зб. наук. пр. Центру воєнно-стратегічних досліджень Національного університету оборони України, 28,* С.86-90.
9. Котляров В.П. (2013). Методичний підхід до аналітичного розв'язання системи диференціальних рівнянь, які описують динаміку зміни чисельності протиборчих угруповань із урахуванням їх поповнення. *Зб. наук. пр. ЦНДІ ЗС України, 4(66),* С. 32–36.
10. Пащенко Т.П., Микусь С.А., Солонніков В.Г. та ін. (2021). Методи моделювання бойових дій військ (сил): навчальний посібник. К.: НУОУ ім. Івана Черняховського. 262 с.
11. Митюков Н.В. (2008). К вопросу о типологии Ланчестерских моделей. *Круг идей: междисциплинарные подходы в исторической информатике.* М.,. С. 375-399.
12. Назаренко В. О. (2014). Методика оцінки способів ведення бою протидіючих угруповань військ (сил). *Зб. наук. пр. Центру воєнно-стратегічних досліджень Національного університету оборони України імені Івана Черняховського,* С. 91-95. Режим доступу: https: // uk.wiktionary.org / wiki / бойова_одиниця.
13. Романченко І.С. та ін. (2022). Основи воєнно-теоретичних досліджень: нові реалії та технології. Моногр. у 4 т. Київ. ЦНДІ ЗС України. Т. 4. Дослідження операцій у військовій сфері. За заг. ред. проф. Романченка І.С. Київ. ЦНДІ ЗС України. 328 с.
14. Пашков Н.Ю., Строгалев В.П. та Чуев В.Ю. (2010). Смешанная модель динамики средних для многочисленных группировок. *Оборонная техника, 10(9),* С. 19-21.
15. Поплавець С.І., Гузченко С.В., Гатченко Є.С., Лук'янов С.М,, Дроль О.Ю. та Тітов О.С. (2021). Можливий підхід до оцінювання динаміки бою. *Scientific Collection "InterConf",*

[82]: with the Proceedings of the 5th Internetional Scientific and Practical Conference "GLOBAL AND REGIONAL ASPECTS OF SUSTAINABLE DEVELOPMENT" (October 25-26, 2021). Copenhagen, Denmark; pp. 254-262. Available at https://interconf.top/...

16. (2023). Рік війни за свободу : Воєнно-історичний нарис російсько-української війни (24.02.2022-24.02.2023) у чотирьох книгах. Книга I / Апарат Головнокомандувача Збройних Сил України, Генеральний штаб Збройних Сил України та Центр досліджень воєнної історії Збройних Сил України. Київ: Видавництво Ліра-К. 270 с
17. (2023). Рік війни за свободу : Воєнно-історичний нарис російсько-української війни (24.02.2022- 24.02.2023) у чотирьох книгах. Книга II / Міністерство оборони України, Апарат Головнокомандувача Збройних Сил України, Генеральний штаб Збройних Сил України та Центр досліджень воєнної історії Збройних Сил України. Київ: Видавництво Ліра-К. 198 с.
18. (2023). Рік війни за свободу : Воєнно-історичний нарис російсько-української війни (24.02.2022-24.02.2023) у чотирьох книгах. Книга III / Міністерство оборони України, Апарат Головнокомандувача Збройних Сил України, Генеральний штаб Збройних Сил України та Центр досліджень воєнної історії Збройних Сил України. Київ: Видавництво Ліра-К. 198 с.
19. (2023). Рік війни за свободу : Воєнно-історичний нарис російсько-української війни (24.02.2022-24.02.2023) у чотирьох книгах / Міністерсто оборони України, Апарат Головнокомандувача Збройних Сил України, Генеральний штаб Збройних Сил України, Центр досліджень воєнної історії Збройних Сил України. Київ: Видавництво Ліра-К. 267 с.
20. Романченко І., Котляров В. та Павлюк О. (2018). Визначення аналітичної залежності для початкового співвідношення сил сторін з урахуванням критеріальних обмежень. *Сучасні інформаційні технології у сфері безпеки та оборони, 3(33),* С. 139–142.
21. Романченко І., Котляров В. та Шаповал Ю. (2008). Чисельна інтерпретація динаміки змінення співвідношення сил сторін під час ведення ними бойових дій. *Зб. наук. пр. ЦНДІ ЗС України, 4(46),* С. 11–15.
22. Семон Б.Й., Леонтьєв О.Б., Котов О.Б., Хращевський Р.В. та Адаменко А.А. (2009). Сучасний метод бойових потенціалів в прикладних задачах планування розвитку та застосування тактичної авіації: монографія. К. : НАОУ. 336 с.
23. Фурсенко О.К., Черновол Н.М. (2020). Ланчестеровські моделі бойових дій. *Зб. наук. пр. Харківського національного університету Повітряних Сил, 4(66),* С. 85-91. DOI: 10.30748/zhups.2020.66.12
24. Lanchester F. W. (1916). Aircraft in Warfare: the Dawn of the Found Arm. Constable and Co. London.
25. Tom Cooper. Ukraine War, 1 September 2022: Manoeuvre Warfare for Beginners. https://medium.com/@x_TomCooper_x/ Ukraine-war-1-september- 2022-manoeuvre-warfare-for-beginners-534edb28873d.

References

1. Buravlev A.I. (2009). Differential Equation for the Quantitative Ratio of the Numbers of Opposing Forces. Weapons and Economics, *4(8)*, P. 4-8.
2. Butvin B.L., Mashkin O.O. and Solomnytskyi O.I. (2019). Using Modified Equations of Dynamic Averaging to Forecast the Course and Outcome of Combat Operations. *Contemporary Information Technology in Defense and Security*, *2(35),* P. 115-120.
3. Venttsel E.S. (1964). Introduction to Operations Research. Moscow. Soviet Radio 388 pages.
4. Hrabchak V. I., Suprun V.I. and Zaskoka A.M. (2012) Analytical Model of Battle between Opposing Factions. *Military Technical Journal, 1(6), P.* 110–120.

5. Zahorka O. M., Mosov S. P., Sbitnev A. I., Stuzhuk P. I. (2005) Aspects of Complex Military System Analysis: Scientific manual for doctoral students, PhD students, applicants, and postgraduate students of the National Defense Academy of Ukraine. Kyiv: National Defense Academy of Ukraine. 100 pages.
6. Zahorka O.M., Mozharoskyi V.M., Frolov V.S., Zahorka I.O. (2019). Methodological Approach to Determining the Combat Composition of the Armed Forces in Wartime and Peacetime. *Collection of scientific publications of the Center for Military Strategic Studies of the Ivan Chernyakhovsky National Defense University of Ukraine, 1(65), P.6 -11*
7. Zahorka O.M., Polishchuk S.V., Zahorka I.O. (2020). Methodological Guidelines for Forecasting Losses of Opposing Forces in a Combined Arms Operation (Battle). . *Science and Defense Journal, 1.* Kyiv P.52–57.
8. Katsalap V.O. (2013). Methodology for Assessing the Dynamic Changes in the Combat Potential of the Opposing Parties. *Collection of scientific publications of the Center for Military Strategic Studies of the Ivan Chernyakhovsky National Defense University of Ukraine, 28, P.86 -90*
9. Kotliarov V.P. (2013). Methodical Approach to the Analytical Solution of a System of Differential Equations Describing the Dynamic Changes in the Number of Opposing Factions with Consideration for Their Replenishment. *Collection of scientific publications of the Central Research and Development Institute of the Armed Forces of Ukraine, 4(66), P.* 32–36.
10. Pashchenko T.P., Mykus S.A., Solonnikov V.H. Et al. (2021). Methods of Combat Operations Modeling: A Study Guide Kyiv: Ivan Chernyakhovsky National Defense University of Ukraine . 262 pages.
11. Mytiukov N.V. (2008). On the Topic of Lanchester Model Typology. *A circle of ideas: Interdisciplinary Approaches in Historical Informatics.* Moscow, P. 375-399.
12. Nazarenko V. O. (2014). Methodology for Assessing the Combat Tactics of Opposing Forces. *Collection of scientific publications of the Center for Military Strategic Studies of the Ivan Chernyakhovsky National Defense University of Ukraine, P.* 91-95. Accessed at: https: // uk.wiktionary.org / wiki / бойова_одиниця.
13. Romanchenko I.S. Et al. (2022). Fundamentals of War Theory Research: New Reality and New Technology. Monograph in 4 volumes. Kyiv. Central Research and Development Institute of the Armed Forces of Ukraine. T. 4. Military Operations Analysis. General editing by prof. Romanchenko I.S. Kyiv. Central Research and Development Institute of the Armed Forces of Ukraine. 328 pages.
14. Pashkov N.Yu., Strohalev V.P., and Chuiev V.Yu. (2010). Mixed Model of the Dynamic Averaging for Multinomial Clusters. Defense Technology, 10(9), P. 19-21.
15. Poplavets S.I., Huzchenko S.V., Hatchenko Ye.S., Lukyanov S.M., Drol O.Yu., and Titov O.S. (2021). Possible Approach to Assessing Battle Dynamics. *Scientific Collection "InterConf", [82]: with the Proceedings of the 5th Internetional Scientific and Practical Conference "GLOBAL AND REGIONAL ASPECTS OF SUSTAINABLE DEVELOPMENT" (October 25-26, 2021).* Copenhagen, Denmark; pp. 254-262. Available at https://interconf.top/...
16. (2023). A Year of War for Freedom: Military Historical Outline of the Russian-Ukrainian War (February 24, 2022-February 24, 2023) in four books. Book I/ Office of the Commander-in-Chief of the Armed Forces of Ukraine, the General Staff of the Armed Forces of Ukraine, and the Center for Military History Research of the Armed Forces of Ukraine. Kyiv: Lira-K Publishing House. 270 pages.
17. (2023). A Year of War for Freedom: Military Historical Outline of the Russian-Ukrainian War (February 24, 2022 - February 24, 2023) in four books. Book II/ Ministry of Defense of Ukraine, the Office of the Commander-in-Chief of the Armed Forces of Ukraine, the General

Staff of the Armed Forces of Ukraine, and the Center for Military History Research of the Armed Forces of Ukraine. Kyiv: Lira-K Publishing House. 198 pages.
18. (2023). A Year of War for Freedom: Military Historical Outline of the Russian-Ukrainian War (February 24, 2022-February 24, 2023) in four books. Book III/ Ministry of Defense of Ukraine, the Office of the Commander-in-Chief of the Armed Forces of Ukraine, the General Staff of the Armed Forces of Ukraine, and the Center for Military History Research of the Armed Forces of Ukraine. Kyiv: Lira-K Publishing House. 198 pages.
19. (2023). A Year of War for Freedom: Military Historical Outline of the Russian-Ukrainian War (February 24, 2022-February 24, 2023) in four books / Ministry of Defense of Ukraine, the Office of the Commander-in-Chief of the Armed Forces of Ukraine, the General Staff of the Armed Forces of Ukraine, and the Center for Military History Research of the Armed Forces of Ukraine. Kyiv: Lira-K Publishing House. 267 pages.
20. Romanchenko I., Kotliarov V. and Pavliuk O. (2018). Defining the Analytical Dependence for the Initial Force Ratio of the Parties, Taking into Account Criteria Constraints. *Contemporary Information Technology in Defense and Security*, *3(33),* P. 139–142.
21. Romanchenko I., Kotliarov V. and Shapoval Yu. (2008). Numerical Interpretation of the Dynamic Changes in the Force Ratio of the Parties in the Course of Combat Operations. *Collection of scientific publications of the Central Research and Development Institute of the Armed Forces of Ukraine, 4(46),* P. 11–15.
22. Semon B.Y., Leontiev O.B., Kotov O.B., Khrashchevskyi R.V. and Adamenko A.A. (2009). Modern Method of Combat Potentials in Applied Problems of Planning the Development and Use of Tactical Aviation: monograph. Kyiv : National Defense Academy of Ukraine. 336 pages.
23. Fursenko O.K., Chernovol N.M. (2020). Lanchester Models of Warfare. *Collection of scientific publications of the Ivan Kozhedub Kharkiv University of Air Force, 4(66),* P. 85-91. DOI: 10.30748/zhups.2020.66.12
24. Lanchester F. W. (1916). Aircraft in Warfare: the Dawn of the Found Arm. Constable and Co. London.
25. Tom Cooper. Ukraine War, 1 September 2022: Manoeuvre Warfare for Beginners. https://medium.com/@x_TomCooper_x/ Ukraine-war-1-september- 2022-manoeuvre-warfare-for-beginners-534edb28873d.

An approach to evaluating opposing parties over time based on the analytical solution of a system of nonlinear differential equations using the method of average dynamics

Anatolii Zvarych
PhD of Military Sciences, Senior Scientist
Leading Research Fellow
Central Research and Development Institute of the Armed Forces of Ukraine
03049, Povitroflotskyi Avenue 28B, Kyiv, Ukraine
e-mail: zvarych_ao@ukr.net
ORCID: 0000-0002-7136-0295

Svitlana Zvarych
PhD of Technical Sciences, Senior Scientist
Senior Research Fellow
Central Research and Development Institute of the Armed Forces of Ukraine
03049, Povitroflotskyi Avenue 28B, Kyiv, Ukraine
e-mail: zvarych.ss@gmail.com
ORCID: 0000-0002-0636-250X

Abstract The relevance of this research stems from the need for a critical analysis of a rapidly developing military conflict (as an integral part of military security). It can be described by the nonlinear Lanchester equations. This critical analysis focuses on two aspects. The first aspect allows to establish a formula-driven relationship of the initial force ratio with predetermined criterion values. This relationship takes the form of a biquadratic equation. The second aspect concerns the critical assessment of the time required to achieve the ultimate objective of one of the parties in a conflict, where the original system is reduced to a single nonlinear first-order differential equation that can be solved for the time parameter using tabular integration. The aim of the article is to develop an approach for calculating the initial ratio of firepower available to the warring parties, as well as the predicted duration of hostilities that would produce an acceptable extent of losses for one of the parties while achieving the final predefined firepower ratio. Conventional approaches based on the dynamic averaging method, allow to calculate the required initial ratios of forces and assets of the warring parties using models describing conflicts of a certain intensity based on linear differential equations with **a constant** destructive effect under predefined (acceptable) loss thresholds. At the same time, the use of mathematical models based on systems of nonlinear differential equations to describe combat operations allows to account for the intensity of the destructive effect, which, as is common for modern military conflicts, changes over time. Nowadays, systems of these equations are usually solved using numerical methods, which is a rather laborious task. The article presents an approach based on the analytical solution of a system of nonlinear differential equations using the dynamic averaging method, which **takes into account** the intensity of the destructive effect, which changes in the course of hostilities. Such an approach makes it possible to quickly calculate the parameters that can be used in operation (combat) planning (in particular, when justifying the required force composition and duration of an operation). The suggested method allows to calculate the initial ratio of firepower available to the warring parties, as well as the predicted duration of hostilities that would produce an acceptable extent of losses for one of the parties while achieving the final predefined firepower ratio. The feasibility of this approach is confirmed by a computational example.

Keywords: analytical analysis, mathematical model, dynamics, combat operations, conflict, correlation.